

Российская академия наук
Уральская школа науки и технологий
имени академика В.П. Макеева
Межрегиональный совет по науке и технологиям

Ч2
И931



ИТОГИ НАУКИ
Выпуск 55

Москва – 2025

УДК 62 (063)
ББК 425

Итоги науки. Выпуск 55 (Э.А. Асмарян. О последней теореме Ферма – отдельный оттиск). – М.: РАН, 2025. – 10 с.

Редакционный совет: Шестаков А.Л., председатель (Челябинск), Коржов А.В., заместитель председателя (Челябинск), Шипулин Л.В., ответственный секретарь (Челябинск), Акбулатов Э.Ш. (Красноярск), Гильмутдинов А.Х. (Казань), Карякин М.И. (Ростов-на-Дону), Колодяжный С.А. (Воронеж), Кравченко О.А. (Тула), Туричин Г.А. (Санкт-Петербург), Шафаревич А.И. (Москва), Шахматов Е.В. (Самара)

Редакционная коллегия: Ершов Н.П., главный редактор (Миасс), Ершов П.Н., заместитель главного редактора и ответственный секретарь (Миасс), Бердышев В.И. (Екатеринбург), Дегтярь В.Г. (Миасс), Коблов С.В. (Королев), Кульчин Ю.Н. (Владивосток), Немировский Ю.В. (Новосибирск), Савченко О.Ф. (Санкт-Петербург), Соломонов Ю.С. (Москва), Трусов В.Н. (Дубна), Чернышев С.Л. (Жуковский), Якуш С.Е. (Москва)

Зарубежная секция редакционной коллегии: Акопян В.Н. (г. Ереван, Армения), Кобулиев З.В. (г. Душанбе, Таджикистан), Мамедов Б.А. (г. Сумгаит, Азербайджан), Мухаммедов Г.А. (г. Ашхабад, Туркменистан), Подлубко С.Н. (г. Минск, Беларусь), Прангишвили А.И. (г. Тбилиси, Грузия), Тешебаев Т.З. (г. Ташкент, Узбекистан), Тулешов А.К. (г. Алматы, Казахстан), Чокинэ В.К. (г. Кишинев, Молдова), Шаршеналиев Ж.Ш. (г. Бишкек, Кыргызстан)

Ответственные за выпуск: Ершов П.Н., Тарасов Д.В.

Адрес Редакционной коллегии
456304, г. Миасс Челябинской обл., ул. 8 Июля, 10А, офис 404
Межрегиональный совет по науке и технологиям
Тел./факс (3513) 53-67-16
www.msnt.pp.ru
E-mail: msnt@mail.ru

© Российская академия наук, 2025
© Уральская школа науки и технологий
имени академика В.П. Макеева, 2025
© Межрегиональный совет по науке и технологиям, 2025

Э.А. Асмарян

Институт радиопизики и электроники НАН Армении
(г.Аштарак, Армения)

О ПОСЛЕДНЕЙ ТЕОРЕМЕ ФЕРМА

Введение

Почти 360-летняя история попыток доказательства Последней (или Великой) теоремы Ферма увенчалась успехом в 1995 году, когда Э. Уайлс опубликовал своё эпиское доказательство [1]. Однако существование более простого доказательства классическими алгебраическими методами не исключается.

Последняя теорема Ферма утверждает, что диофантово уравнение

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 1 \text{ - целое} \quad (1)$$

не имеет решений в виде тройки положительных целых чисел (x, y, z) , если $n > 2$.

В данной работе сделана попытка доказательства этой теоремы с использованием метода, применённого автором в [2], учитывающего внутреннюю связь между числами, входящими в (1).

Доказательство излагается в следующей последовательности: сначала (в части 1) мы получаем общую формулу для случаев чётных и нечётных n и затем (в части 2) проводится анализ этой формулы в этих двух случаях.

1. Получение общей формулы

1.1 Пусть n чётно и, для определённости, задано положительное чётное число x .

Мы предположим, что существуют целые положительные y, z , которые вместе с x удовлетворяют (1).

Тогда y и z должны быть числами с одинаковой чётностью, т.е. они должны быть связаны друг с другом соотношением

$$z = y + 2m, \quad m \text{ - целое} \quad (1.1.1)$$

Тогда (1) даёт

$$x^n + y^n = (y + 2m)^n \quad (1.1.2)$$

Пользуясь формулой бинорма Ньютона, запишем (1.1.2) в виде

$$x^n + y^n = \sum_{q=0}^n C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q = y^n + (2m)^n + \sum_{q=1}^{n-1} C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q, \quad (1.1.3)$$

и получим уравнение, связывающее y с x и параметрами m и n :

$$\sum_{q=1}^{n-1} C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n - (2m)^n] = 0 \quad (1.1.4)$$

Таким же образом получим для z :

$$-\sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q C_n^q z^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n + (2m)^n] = 0 \quad (1.1.5)$$

(1.1.4) и (1.1.5) являются алгебраическими уравнениями с целыми коэффициентами. Их целые решения y, z , если они существуют, должны быть делителями свободных членов, соответственно:

$$x^n - (2m)^n, \quad x^n + (2m)^n, \quad x > 2m \quad (1.1.6)$$

Мы предположим, что такие целые положительные решения среди делителей (1.1.6) существуют. Запишем их в виде:

$$y = \frac{x^n - (2m)^n}{k_y}, \quad z = \frac{x^n + (2m)^n}{k_z}, \quad k_y \geq k_z, \quad (1.1.7)$$

где k_y и k_z целые положительные числа. Они также являются делителями (1.1.6), но не обязаны быть решениями (1.1.4) и (1.1.5).

Подставив предполагаемые решения (1.1.7) в (1) и (1.1.1), получим:

$$\frac{[x^n + (2m)^n]^n}{k_z^n} - \frac{[x^n - (2m)^n]^n}{k_y^n} = x^n \quad (1.1.8)$$

$$\frac{x^n + (2m)^n}{k_z} - \frac{x^n - (2m)^n}{k_y} = 2m \quad (1.1.9)$$

Исключив k_z из (1.1.8) и (1.1.9), получим

$$\frac{1}{k_y^n} \left\{ [x^n + 2mk_y - (2m)^n]^n - [x^n - (2m)^n]^n \right\} = x^n \quad (1.1.10)$$

или, используя формулу бинорма Ньютона,

$$\frac{1}{k_y^n} \left\{ \sum_{q=0}^n C_n^q x^{n(n-q)} \cdot [2mk_y - (2m)^n]^q - \sum_{q=0}^n (-1)^q C_n^q x^{n(n-q)} \cdot (2m)^{nq} \right\} = x^n \quad (1.1.11)$$

1.2. Пусть n нечётно и x чётно,

Тогда опять $z = y + 2m$ и мы получим для y и z :

$$\sum_{q=1}^{n-1} C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n - (2m)^n] = 0 \quad (1.2.1)$$

$$-\sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q C_n^q z^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n - (2m)^n] = 0 \quad (1.2.2)$$

Опять предположим, что целые положительные решения уравнений (1.2.1) и (1.2.2) существуют. Они должны быть делителями свободных членов уравнений (1.2.1) и (1.2.2). Запишем эти решения в виде:

$$y = \frac{x^n - (2m)^n}{k_y}, \quad z = \frac{x^n - (2m)^n}{k_z}, \quad x > 2m, \quad k_y > k_z, \quad (1.2.3)$$

где k_y и k_z целые положительные числа.

Тогда (1) и (1.1) дают:

$$\frac{[x^n - (2m)^n]^n}{k_z^n} - \frac{[x^n - (2m)^n]^n}{k_y^n} = x^n \quad (1.2.4)$$

$$\frac{x^n - (2m)^n}{k_z} - \frac{x^n - (2m)^n}{k_y} = 2m \quad (1.2.5)$$

Исключив k_z из (1.2.4) и (1.2.5), получим:

$$\frac{1}{k_y^n} \left\{ [x^n + 2mk_y - (2m)^n]^n - [x^n - (2m)^n]^n \right\} = x^n \quad (1.2.6)$$

или в виде бинорма Ньютона:

$$\frac{1}{k_y^n} \left\{ \sum_{q=0}^n C_n^q x^{n(n-q)} \cdot [2mk_y - (2m)^n]^q - \sum_{q=0}^n (-1)^q C_n^q x^{n(n-q)} \cdot (2m)^{nq} \right\} = x^n \quad (1.2.7)$$

Мы видим, что (1.1.10) и (1.2.6) по форме совпадают, т.е. представляют собой общую формулу для чётных и нечётных n .

2. Анализ общей формулы в случаях чётных и нечётных n .

Сначала выберем наиболее удобный для анализа вид общей формулы.

2.1 Пусть n чётно. В этом случае для анализа наиболее удобна формула (1.1.11). К тому же, при этом мы сможем определить k_y .

Представим $\sum_{q=0}^n$ в (1.1.11) в виде сумм по чётным и нечётным q :

$$\sum_{q=0}^n = \sum_{q_{ev}=0}^n + \sum_{q_{odd}=1}^{n-1} \quad (2.1.1)$$

Тогда (1.1.11) запишем в виде

$$\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{ev}=0}^n C_n^q x^{n(n-q)} \cdot \left\{ [2mk_y - (2m)^n]^q - (2m)^{nq} \right\} + \left[\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{odd}=1}^{n-1} C_n^q x^{n(n-q)} \left\{ [2mk_y - (2m)^n]^q + (2m)^{nq} \right\} - x^n \right] = 0 \quad (2.1.2)$$

(1.1.11) фактически есть представление заданного числа x^n в виде суммы его различных степеней (от n до 0) с соответствующими коэффициентами, причем член $\sim (x^n)^1$ присутствует только в $\sum_{q_{odd}=1}^{n-1}$ при $q = n - 1$.

Левая часть (2.1.2) есть сумма двух выражений: $\sum_{q_{ev}=0}^n$ и выражения в больших квадратных скобках. $\sum_{q_{ev}=0}^n$ не может быть отрицательной, так как суммируемые в ней выражения неотрицательны, что следует из (1.1.10). Очевидно, что выражение в больших квадратных скобках также не может быть отрицательным. Следовательно, левая часть (2.1.2) может равняться нулю только если и $\sum_{q_{ev}=0}^n$, и выражение в больших квадратных скобках равны 0. Тогда для всех q_{ev} должно выполняться условие:

$$[2mk_y - (2m)^n]^{q_{ev}} - (2m)^{nq_{ev}} = 0, \text{ т.е. } 2mk_y - (2m)^n = \pm(2m)^n \quad (2.1.3)$$

Так как $k_y \neq 0$, то в (2.1.3) нужно брать $(2m)^n$ только со знаком +, и тогда получим:

$$k_y = 2 \cdot (2m)^{n-1} \quad (2.1.4)$$

Из (1.1.9) и (2.1.4) получается, что

$$k_z = k_y = 2 \cdot (2m)^{n-1} \quad (2.1.5)$$

Из (2.1.2) при условии (2.1.3) получаем

$$\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{odd}=1}^{n-1} C_n^q 2 \cdot (2m)^{nq} x^{n(n-q)} = x^n \quad (2.1.6)$$

Так как все члены в $\sum_{q_{odd}=1}^{n-1}$ положительны, то в (2.1.6) эта сумма должна иметь только член с $q = n - 1$, который в то же время должен быть первым членом суммы, т.е. должно быть

$$n - 1 = 1, n = 2 \quad (2.1.7)$$

Этот результат можно получить аналитически. Действительно, коэффициент при x^n в члене $q = n - 1$ в (2.1.6) должен равняться 1, т.е.

$$\frac{1}{k_y^n} C_n^{n-1} 2 \cdot (2m)^{n(n-1)} = 1 \quad (2.1.8)$$

Тогда $k_y^n = 2n \cdot (2m)^{n(n-1)} \quad (2.1.9)$

Возведя (2.1.4) в степень n и сравнив с (2.1.9), получаем уравнение для n :

$$2^n = 2n \quad (2.1.10)$$

Единственным чётным решением уравнения (2.1.10) является $n = 2$. Поэтому равенству (2.1.2) и, следовательно, равенству (1), из всех чётных чисел удовлетворяет только $n = 2$.

2.2 Для нечётных n представим (1.2.7) в виде

$$\sum_{q=0}^n = \sum_{q_{ev}=0}^{n-1} + \sum_{q_{odd}=1}^n \quad (2.2.1)$$

и получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{ev}=0}^{n-1} C_n^q x^{n(n-q)} \cdot \{ [2mk_y - (2m)^n]^q - (2m)^{nq} \} + \\ & + \left[\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{odd}=1}^n C_n^q x^{n(n-q)} \{ [2mk_y - (2m)^n]^q + (2m)^{nq} \} - x^n \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Так как k_y должно быть положительным числом, то в (2.2.2) выражение под знаком $\sum_{q_{odd}=1}^n$ не может быть равным 0:

$$[2mk_y - (2m)^n]^{q_{odd}} + (2m)^{nq_{odd}} \neq 0, \text{ для всех } q_{odd} \quad (2.2.3)$$

Из (2.2.2) и (2.2.3) следует, что выражение под знаком $\sum_{q_{ev}=0}^{n-1}$, также не может быть равным 0:

$$[2mk_y - (2m)^n]^{q_{ev}} - (2m)^{nq_{ev}} \neq 0, \text{ для всех } q_{ev}, \text{ исключая } q_{ev} = 0 \quad (2.2.4)$$

Представление (2.2.2) при условиях (2.2.3) и (2.2.4) не даёт возможности определить k_y , и оно неэффективно в случае нечётных n (в отличие от (2.1.2) для чётных n). Поэтому далее (в п.2.3) мы будем анализировать общую для чётных и нечётных n формулу (1.2.6).
2.3. Заметим, что (1.2.6) удовлетворяется для всех n , когда $2m = x$. Тогда $y = 0$, как это и должно быть, так как в этом случае уравнение (1) принимает вид $x^n + y^n = (x + y)^n$, что верно лишь при $y = 0$. Поэтому случай $2m = x$ не соответствует требованию теоремы Ферма о положительности y . Следовательно, нужно выяснить, существуют ли также и числа $2m_i < x$ (т.е. когда $y \neq 0$), при которых удовлетворялось бы равенство (1.2.6), а значит, и равенство (1).

В (1.1.6) и (1.2.3) мы уже приняли условие $2m < x$, которое необходимо для положительности y и z . Здесь мы применим это условие в явном виде, введя параметр β_i как

$$2m_i = x\beta_i, \quad \beta_i < 1 \text{ -рациональное число} \quad (2.3.1)$$

Тогда (1.2.6) запишется в виде

$$\frac{1}{k_y^n} \left\{ x^n \left[(1 - \beta_i^n) + \frac{k_{iy}}{x^{n-1}} \beta_i \right] \right\}^n - [x^n (1 - \beta_i^n)]^n = x^n \quad (2.3.2)$$

После несложных преобразований в (2.3.2) получим:

$$x^n = x^n \beta_i^n \left\{ \left[1 + (1 - \beta_i^n) \frac{x^{n-1}}{\beta_i k_{iy}} \right]^n - \left[(1 - \beta_i^n) \frac{x^{n-1}}{\beta_i k_{iy}} \right]^n \right\} \quad (2.3.3)$$

Далее проанализируем формулу (2.3.3) для всех n , полагая $1 - \beta_i^n > 0$.

2.3(a) Пусть $n=2$. Тогда (2.3.3) даёт $(1 - \beta_i^2) \left(1 - \frac{2\beta_i x}{k_{iy}}\right) = 0$, или

$$\left(1 - \frac{2\beta_i x}{k_{iy}}\right) = 0, \text{ так как } 1 - \beta_i^2 \neq 0 \quad (2.3.4)$$

Подставив (2.1.4) и (2.3.1) в (2.3.4), получим тождество: $1-1=0$, т.е. (2.3.3) выполняется для любых β_i (или $2m_i$), определённых как (2.3.1). Из них нас будут удовлетворять только те $2m_i$, при которых y и z будут целыми и положительными. Как видно из (1.1.7) это те $2m_i$, которые являются чётными делителями числа $\frac{x^2}{2}$, меньшими, чем x (результат, полученный в [2] для Пифагоровых троек).

2.3(б) Пусть $n > 2$

В этом случае, считая опять $1 - \beta_i^n > 0$, из (2.3.3) получим равенство

$$\sum_{q=2}^{n-1} C_n^q \beta_i^{n-q} (1 - \beta_i^n)^{q-1} \left(\frac{x^{n-1}}{k_{iy}}\right)^q = 1 - n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} \quad (2.3.5)$$

Пусть $n > 2$ чётно. Тогда, согласно, (2.1.4), $\frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} = \frac{1}{2}$, и правая часть (2.3.5) равна

$$\frac{2-n}{2} \quad (2.3.6)$$

Из (2.3.6) видно, что при $n > 2$ правая часть равенства (2.3.5) отрицательна, тогда как левая-положительна, т.е. нет никаких рациональных $\beta_i < 1$ (а, значит, и соответствующих $2m_i < x$), которые удовлетворяли бы этому равенству. Следовательно, и уравнение Ферма (1) не удовлетворяется при чётных $n > 2$.

Пусть n нечётно.

Поскольку для нечётных n k_y не определено, то для этого случая приведём следующие соображения.

Нечётное число n лежит между чётными числами $n-1$ и $n+1$. Сравнение (2.3.5) для чётных чисел $n-1$ и $n+1$ (т.е. при увеличении на 2 этого показателя), показывает, что в его правой части второй член увеличивается от $\frac{n-1}{2}$ до $\frac{n+1}{2}$, как следует из (2.1.4). Так как (2.3.5) по своей структуре является одинаковым для всех чётных и нечётных чисел, то при увеличении этого показателя на 1 (т.е. при переходе от чётного числа к нечётному) значение второго члена в его правой части также должно увеличиться, и это увеличенное значение должно лежать между $\frac{n-1}{2}$ и $\frac{n+1}{2}$.

Поэтому, если n нечётно, то можем написать:

$$\frac{n-1}{2} < n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} < \frac{n+1}{2} \quad (2.3.7)$$

и, соответственно, для правых частей (2.3.5) будет

$$1 - n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} > 1 - \frac{n+1}{2} \quad (2.3.8)$$

или

$$\frac{3-n}{2} > 1 - n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} > \frac{1-n}{2} \quad (2.3.9)$$

Таким образом, при нечётных n в равенстве (2.3.5) правая часть отрицательна, тогда как левая-положительна, поэтому оно не выполняется ни при каких рациональных $\beta_i < 1$. Следовательно и уравнение Ферма (1) не выполняется при нечётных n .

3. До сих пор мы, для определенности, рассматривали случай, когда x чётно. Если x нечётно, то y и z , если они существуют как решения (1), должны быть числами разной чётности, т.е.

$$z = y + (2m + 1), m \geq 0, \quad (3.1)$$

Для того, чтобы получить все необходимые формулы в этом случае, нужно в соответствующих формулах в части 1 и в части 2 сделать замену $2m \rightarrow 2m + 1$ и тогда мы приходим к тем же результатам и выводам, что и при чётных x .

Заключение

Отметим, что применённый в статье подход состоит в том, что имея заданное произвольное целое положительное число x , исследуется возможность существования пары других целых положительных целых чисел y, z , связанных друг с другом соотношениями (1.1.1) или (3.1), и которые вместе с x удовлетворяют уравнению Ферма (1).

Получена общая (для чётных и нечётных n) формула (1.2.6), анализ которой доказывает, что требуемые y, z существуют только при $n = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. A. Wiles. Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem. Annals of Mathematics, v.141,3(1995), p.p.443-551.
2. E. Asmaryan. On the Generation of Pythagorean Triples and Representation of Integers as a difference of two squares. International Journal of Mathematics and Computer Sciences, v.13, 1 (2018), pp. 59-71.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Асмарян Э.А. О последней теореме Ферма..... 3



ИТОГИ НАУКИ
Выпуск 55

Introduction. The nearly 360-years history of attempts to prove Fermat's Last (or Great) Theorem was crowned with success in 1995, when A. Wiles published his epic proof [1].

However, the existence of simpler proof using classical algebraic methods is not excluded.

In this paper the attempt of proof of this theorem is proposed with use of method applied by the author in [2]. This method takes into account the inner ties existing between x, y, z in (1). A proof is adduced in following sequence: at first (part 1) we obtain the common formula for even and odd n , and then the analysis is provided for those two cases (part 2).

1. The common formula for even and odd n .

Fermat's Last Theorem affirms that the Diophantine Equation

$$x^n + y^n = z^n, \quad n > 1 \text{ is integer}, \quad (1)$$

has no solution in form of triple of positive integers x, y, z when $n > 2$.

1.1. **Let n be even and, for definition, the even integer $x > 2$ is given.** We suppose that positive integers y and z exist, which satisfy (1). Then y, z are integers of the same parity, i.e., they are coupled together by expression:

$$z = y + 2m, \quad m \text{ is integer} \quad (1.1.1)$$

Then (1) gives

$$x^n + y^n = (y + 2m)^n \quad (1.1.2)$$

Using Newton's binomial formula, we write

$$x^n + y^n = \sum_{q=0}^n C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q = y^n + (2m)^n + \sum_{q=1}^{n-1} C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q, \quad (1.1.3)$$

and obtain equation connecting y with x and parameters m and n .

$$\sum_{q=1}^{n-1} C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n - (2m)^n] = 0 \quad (1.1.4)$$

Similarly, we obtain for z :

$$-\sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q C_n^q z^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n + (2m)^n] = 0 \quad (1.1.5)$$

(1.1.4) and (1.1.5) are algebraic equations with integer coefficients. Their integer solutions y and z , if they exist, must be divisors of free terms accordingly:

$$x^n - (2m)^n, \quad x^n + (2m)^n, \quad x > 2m \quad (1.1.6)$$

So, we will suppose that there are positive integer solutions among divisors of (1.1.6).

We can write these solutions as:

¹ This communication represents the translation of the same named article published in the book (Collection): "Itogi nauki", issue 55, Moscow, Publ.: Rus.Ac.Sci., 2025, p.p. 3-9 (in Russian).

$$y = \frac{x^n - (2m)^n}{k_y}, \quad z = \frac{x^n + (2m)^n}{k_z}, \quad k_y \geq k_z, \quad (1.1.7)$$

where k_y and k_z are positive integers. They are divisors (1.1.6) also, but are not obliged to be solutions for (1.1.4) and (1.1.5).

Inserting expected solutions (1.1.7) in (1) and (1.1.1), we obtain:

$$\frac{[x^n + (2m)^n]^n}{k_z^n} - \frac{[x^n - (2m)^n]^n}{k_y^n} = x^n \quad (1.1.8)$$

$$\frac{x^n + (2m)^n}{k_z} - \frac{x^n - (2m)^n}{k_y} = 2m \quad (1.1.9)$$

Excluding k_z from (1.1.8) and (1.1.9), we obtain:

$$\frac{1}{k_y^n} \{ [x^n + 2mk_y - (2m)^n]^n - [x^n - (2m)^n]^n \} = x^n, \quad (1.1.10)$$

or, using Newton's binomial formula,

$$\frac{1}{k_y^n} \{ \sum_{q=0}^n C_n^q x^{n(n-q)} \cdot [2mk_y - (2m)^n]^q - \sum_{q=0}^n (-1)^q C_n^q x^{n(n-q)} \cdot (2m)^{nq} \} = x^n \quad (1.1.11)$$

1.2. Let n be odd and x be even.

Then again $z = y + 2m$ and we obtain equations for y and z :

$$\sum_{q=1}^{n-1} C_n^q y^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n - (2m)^n] = 0 \quad (1.2.1)$$

$$- \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q C_n^q z^{n-q} \cdot (2m)^q - [x^n - (2m)^n] = 0 \quad (1.2.2)$$

We suppose again, that positive integer solutions of (1.2.1) and (1.2.2) exist. They must be divisors of the free terms of (1.2.1) and (1.2.2)

We can write these solutions as:

$$y = \frac{x^n - (2m)^n}{k_y}, \quad z = \frac{x^n - (2m)^n}{k_z}, \quad x > 2m, \quad k_y > k_z, \quad (1.2.3)$$

where k_y and k_z are positive integers.

We obtain from (1) and (1.1.1):

$$\frac{[x^n - (2m)^n]^n}{k_z^n} - \frac{[x^n - (2m)^n]^n}{k_y^n} = x^n \quad (1.2.4)$$

$$\frac{x^n - (2m)^n}{k_z} - \frac{x^n - (2m)^n}{k_y} = 2m \quad (1.2.5)$$

Excluding k_z from (1.2.4) and (1.2.5) we obtain:

$$\frac{1}{k_y^n} \{ [x^n + 2mk_y - (2m)^n]^n - [x^n - (2m)^n]^n \} = x^n, \quad (1.2.6)$$

or, using Newton's binomial formula,

$$\frac{1}{k_y^n} \{ \sum_{q=0}^n C_n^q x^{n(n-q)} \cdot [2mk_y - (2m)^n]^q - \sum_{q=0}^n (-1)^q C_n^q x^{n(n-q)} \cdot (2m)^{nq} \} = x^n \quad (1.2.7)$$

We see, that formulas (1.1.10) and (1.2.6) are the same in form, i.e., they are the common formula for even and odd n .

2. Further we analyze this formula for even and odd n .

At first, we will choose the more convenient form of common formula for analysis.

2.1. Let n be even. In this case the formula (1.1.11) is more convenient for analysis. In addition, we can determine k_y in this case.

Representing $\sum_{q=0}^n$ in (1.1.11) as two sums (over odd and even q) we obtain:

$$\sum_{q=0}^n = \sum_{q_{ev}=0}^n + \sum_{q_{odd}=1}^{n-1} \quad (2.1.1)$$

Then (1.1.11) will be:

$$\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{ev}=0}^n C_n^q x^{n(n-q)} \cdot \{[2mk_y - (2m)^n]^q - (2m)^{nq}\} + \left[\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{odd}=1}^{n-1} C_n^q x^{n(n-q)} \{[2mk_y - (2m)^n]^q + (2m)^{nq}\} - x^n \right] = 0 \quad (2.1.2)$$

(1.1.11) is, in fact, the representation of given number x^n as a sum of its different powers (from n to 0) with corresponding coefficients. The term $\sim(x^n)^1$ presents in (2.1.2) only in $\sum_{q_{odd}=1}^{n-1}$ at $q = n - 1$. The left side of (2.1.2) is the sum of two expressions: $\sum_{q_{ev}=0}^n$ and expression in big square brackets. $\sum_{q_{ev}=0}^n$ cannot be negative since the expressions being summarized in them are non-negative, which may be shown comparing (1.1.10) with (1.1.8) and (1.1.9). It is obvious, that the expression in big square bracket in (2.1.2) cannot be negative also. Hence, each of two expressions in (2.1.2) (i.e., sum $\sum_{q_{ev}=0}^n$ and expression in big square brackets) must be equal to 0. Then the following condition must be fulfilled for all q_{ev} :

$$[2mk_y - (2m)^n]^{q_{ev}} - (2m)^{nq_{ev}} = 0, \text{ i.e. } 2mk_y - (2m)^n = \pm(2m)^n \quad (2.1.3)$$

Since $k_y \neq 0$, in (2.1.3) we take only + sign and get:

$$k_y = 2 \cdot (2m)^{n-1} \quad (2.1.4)$$

We can see from (1.1.9), that then

$$k_z = k_y = 2 \cdot (2m)^{n-1} \quad (2.1.5)$$

Under the condition (2.1.3) we have from (2.1.2):

$$\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{odd}=1}^{n-1} C_n^q 2 \cdot (2m)^{nq} x^{n(n-q)} = x^n \quad (2.1.6)$$

Since all terms of $\sum_{q_{odd}=1}^{n-1}$ are positive, this sum must have only term with $q = n - 1$. At the same time, it will be the first term ($q = 1$) also, i.e., must be:

$$n - 1 = 1, n = 2 \quad (2.1.7)$$

We can get this result analytically. Indeed, the coefficient at x^n in the term $q = n - 1$ in (2.1.6) must be equal 1, i.e.:

$$\frac{1}{k_y^n} C_n^{n-1} 2 \cdot (2m)^{n(n-1)} = 1 \quad (2.1.8)$$

Then $k_y^n = 2n \cdot (2m)^{n(n-1)} \quad (2.1.9)$

Raising (2.1.4) in power n and comparing with (2.1.9), we obtain the equation for n :

$$2^n = 2n \quad (2.1.10)$$

The only even solution of (2.1.10) is $n = 2$. Hence the equation (2.1.2.) and, accordingly, equation (1) are fulfilled only by even $n = 2$.

2.2. For odd n we represent (1.2.7) as:

$$\sum_{q=0}^n = \sum_{q_{ev}=0}^{n-1} + \sum_{q_{odd}=1}^n \quad (2.2. 1)$$

and obtain:

$$\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{ev}=0}^{n-1} C_n^q x^{n(n-q)} \cdot \{[2mk_y - (2m)^n]^q - (2m)^{nq}\} + \left[\frac{1}{k_y^n} \sum_{q_{odd}=1}^n C_n^q x^{n(n-q)} \{[2mk_y - (2m)^n]^q + (2m)^{nq}\} \right] = x^n \quad (2.2. 2)$$

Since k_y is supposed to be a positive number, then in (2.2.2) the expression in $\sum_{q_{odd}=1}^n$ cannot be equal to 0:

$$[2mk_y - (2m)^n]^{q_{odd}} + (2m)^{nq_{odd}} \neq 0, \text{ for all } q_{odd} \quad (2.2.3)$$

Also, as it follows from (2.2.3), in $\sum_{q_{ev}=0}^{n-1}$

$$[2mk_y - (2m)^n]^{q_{ev}} - (2m)^{nq_{ev}} \neq 0, \text{ for all } q_{ev}, \text{ except } q = 0 \quad (2.2.4)$$

The representation (2.2.2) on conditions (2.2.3) and (2.2.4) doesn't give the possibility for definition of k_y and is ineffective for analysis in case of odd n (in contrast to case of even n). Then further we will analyze direct the common formula in form (1.2.6).

2.3. Note that common equation (1.2.6) is satisfied when $2m = x$, both for even and odd n . But in this case $y = 0$, because at $2m = x$ equation (1) becomes $x^n + y^n = (x + y)^n$, which is true only at $y = 0$ (or $n = 1$). Hence, the case $2m = x$, doesn't correspond to requirements of Fermat's theorem. Then we must clear up whether the other $2m_i < x$, satisfying (1.2.6), exist.

In (1.1.6) and (1.2.3) we have already supposed that $2m < x$, which is necessary for positivity of y and z . Here we apply this condition in evident form introducing the parameter β_i as:

$$2m_i = x\beta_i, \quad \beta_i < 1 \text{ is rational} \quad (2.3. 1)$$

Then (1.2.6) will be written as

$$\frac{1}{k_{iy}^n} \left\{ \left[x^n \left[(1 - \beta_i^n) + \frac{k_{iy}}{x^{n-1}} \beta_i \right] \right]^n - [x^n (1 - \beta_i^n)]^n \right\} = x^n \quad (2.3. 2)$$

After simple transformations we obtain:

$$x^n = x^n \beta_i^n \left\{ \left[1 + (1 - \beta_i^n) \frac{x^{n-1}}{\beta_i k_{iy}} \right]^n - \left[\left((1 - \beta_i^n) \frac{x^{n-1}}{\beta_i k_{iy}} \right)^n \right] \right\} \quad (2.3.3)$$

Further we will analyze (2.3.3) for all n , when $1 - \beta_i^n > 0$.

2.3(a) Let $n=2$. Then (2.3.3) gives: $(1 - \beta_i^2) \left(1 - \frac{2\beta_i x}{k_{iy}} \right) = 0$,

$$\text{or} \quad \left(1 - \frac{2\beta_i x}{k_{iy}} \right) = 0, \text{ since } (1 - \beta_i^2) \neq 0 \quad (2.3.4)$$

Substituting (2.1.4) and (2.3.1) in (2.3.4) we obtain the identity $1-1=0$, i.e. (2.3.3) is fulfilled for all β_i (or $2m_i$) determined as (2.3.1). But we will choose only those $2m_i$, which make y and z to be positive integers. As it seen from (1.1.7), they are those $2m_i$, which are the even divisors of $\frac{x^2}{2}$, less than x (the result, obtained in [2] for Pythagorean triples).

2.3(b) Let $n>2$

In this case taking again $1 - \beta_i^n > 0$, we obtain from (2.3.3):

$$\sum_{q=2}^{n-1} C_n^q \beta_i^{n-q} (1 - \beta_i^n)^{q-1} \left(\frac{x^{n-1}}{k_{iy}} \right)^q = 1 - n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} \quad (2.3.5)$$

Let n be even. Then, according to (2.1.4), $\frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} = \frac{1}{2}$, and the right side of (2.3.5) will be:

$$\frac{2-n}{2} \quad (2.3.6)$$

For $n > 2$ the right side of (2.3.5) is negative, whereas left side is positive, which means that for even $n > 2$ (2.3.5) cannot be fulfilled by any rational $\beta_i < 1$. Therefore, the Fermat's equation (1) does not take place when even $n > 2$.

Let n be odd.

Since k_{iy} is not determined for odd n , we adduce the next consideration.

The odd number n lies between even numbers $n-1$ and $n+1$. The comparison of (2.3.5) for $n-1$ and $n+1$ shows that the second term in right side of (2.3.5) increases from $\frac{n-1}{2}$ to $\frac{n+1}{2}$, as it follows from (2.1.4).

Since (2.3.5) has the same structure for all even and odd n , then with the increase from $n-1$ to n (i.e., from even to nearest odd number), the value of this second term on the right side must increase also, and this increased value will lie between $\frac{n-1}{2}$ and $\frac{n+1}{2}$

Then for odd n we can write

$$\frac{n-1}{2} < n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} < \frac{n+1}{2}, \quad (2.3.7)$$

Accordingly,

$$1 - \frac{n-1}{2} > 1 - n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} > 1 - \frac{n+1}{2} \quad (2.3.8)$$

or

$$\frac{3-n}{2} > 1 - n \frac{(2m_i)^{n-1}}{k_{iy}} > \frac{1-n}{2} \quad (2.3.9)$$

Then, at odd $n > 1$ (2.3.5) cannot be fulfilled by any rational $\beta_i < 1$, since its right side is negative, whereas the left side is positive (we would remind that $k_{iy} > 0$. However, its concrete value does not matter in this case). Therefore, the Fermat's equation (1) also does not take place when n is odd.

3. Till now we considered the case when the given number x was even. When x is odd, then y and z , if they exist as solution of (1), must be numbers of different parity, i.e.:

$$z = y + (2m + 1), m \geq 0, \quad (3.1)$$

In order to get the necessary formulas in this case, the substitution $2m \rightarrow 2m + 1$ must be made in correspondent formulas in the parts 1, 2 (common formula (1.2.6), etc.). Then we come to the same results and conclusions, as for even x .

Conclusion

Summarizing, we note that the approach used in this paper is that having a given arbitrary positive integer x , we study the possibility of existence of a pair of other positive integers y, z , which, together with x , satisfy Fermat's equation (1) and are related to each other by relations (1.1.1) (if x is even) or (3.1) (if x is odd). Then we obtain the common (for even and odd n) equation (1.2.6), investigation of which shows that the required y, z exist only at $n = 2$.

References

[1] A. Wiles. Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, v.141,3(1995), p.p.443-551.

[2] E. Asmaryan. On the Generation of Pythagorean Triples and Representation of Integers as a difference of two squares. *International Journal of Mathematics and Computer Sciences*, v.13, 1 (2018), pp. 59–71.

Emil A. Asmaryan;

E-mail: emilas@irphe.am

Address: 1, Alikhanyan Brothers str., Ashtarak 0204, Armenia,

Institute of Radiophysics and Electronics of Armenian Nat. Ac. Sci ,

Website: [http:// www.irphe.am/](http://www.irphe.am/)